Dossier n°17 : Exemples d'étude, au niveau lycée, de situations conduisant à un système d'inéquations linéaires. Applications simples aux problèmes de programmation linéaire de deux variables.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 19 avril 2004
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Les élèves sont familiarisés avec la résolution des problèmes du premier degré (en particulier les inéquations) depuis la classe de troisième ainsi qu'avec la résolution de système de deux équations à deux inconnues.

En classe de Seconde, les élèves poursuivent le travail de résolution de systèmes d'équations linéaires.

En classe de Première ES, les élèves étudient des exemples de systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues et des problèmes de programmation linéaire.

Je choisis donc de situer ce dossier au niveau de la classe de Première ES.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

Pour ce dossier, on supposera connues les définitions de droites et de plans. En particulier, toute droite du plan a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où $(a, b) \neq (0,0)$.

Le but de ce dossier est de résoudre des problèmes issus de situations économiques ou de la vie quotidienne conduisant à un système d'inéquations linéaires.

En classe de Première ES, la résolution d'inéquations linéaires ainsi que celle des systèmes d'inéquations linéaires se fait graphiquement.

En effet, considérons l'inéquation $ax + by + c > 0$ où $(a, b) \neq (0,0)$. Alors la droite d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans :

- l'un est l'ensemble des points M(x ;y) vérifiant $ax + by + c > 0$;
- l'autre est l'ensemble des points M(x ;y) vérifiant $ax + by +c < 0$.

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ est alors la droite frontière.

On en déduit alors la résolution d'une telle inéquation :

- On se ramène à l'inéquation réduite en isolant y (s'il apparaît) :

$y > \dfrac{c - ax}{b}$ si $b > 0$ et $y < \dfrac{c - ax}{b}$ si $b < 0$.

- Les solutions sont les coordonnées des points du demi-plan situé au-dessus ou au-dessous (selon le sens de l'inégalité) de la droite d'équation $y = \dfrac{c - ax}{b}$.

- On barre le demi-plan qui ne convient pas. Si la frontière n'est pas comprises, on la trace en pointillés.

Si y n'apparaît pas, on peut faire le même raisonnement avec x.

On obtient alors en général plusieurs solutions.

Par suite, dans des problèmes issus de situations économiques, il paraît naturel de chercher la solution optimale (par exemple un coût de fabrication moindre ou un bénéfice maximal) : c'est la programmation linéaire.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi pour illustrer ce dossier de vous présenter trois exercices de difficulté croissante :

- le premier exercice n'indique pas la méthode de résolution mais conduit bien évidemment à un système d'inéquations linéaires. Il peut toutefois se résoudre facilement sans faire appel à la méthode graphique ;
- le deuxième exercice conduit à la résolution d'un système d'inéquations linéaires ;
- le troisième exercice est un exemple de programmation linéaire.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants possibles à un spectacle.

Méthode : Résolution algébrique par combinaisons linéaires.

III.2 Exercice n°2.

But : Déterminer les productions possibles d'un atelier de fabrication de palettes de manutention.

Méthode : Résolution graphique.

Remarque :

La dernière question de cet exercice introduit la notion de bénéfice réalisé l'atelier et propose de déterminer les productions correspondant à un bénéfice donné.

Elle permet, en ce sens, d'introduire les problèmes de programmation linéaire.

III.3 Exercice n°3.

But : Optimiser l'utilisation de deux appareils par des services d'une clinique.

Méthode : Résolution graphique, programmation linéaire.

Outils : Programmation linéaire.

On souhaite optimiser la somme perçue par l'hôpital pour l'utilisation des appareils.

Pour cela, on exprimer la somme S en fonction de deux paramètres x et y du problème. On obtient alors, pour une somme S sonnée, une équation de droite (ici $S = 6x + 4y$).

En représentant cette droite pour plusieurs valeurs numériques données, on remarque que les droites obtenues sont parallèles.

De plus, on remarque que l'ordonnée à l'origine de la droite est proportionnelle à la somme perçue : plus la somme augmente, plus l'ordonnée à l'origine augmente.

On cherche donc graphiquement, par translation verticale, la droite ayant la plus grande ordonnée à l'origine, tout en ayant un point dans la zone d'acceptabilité du problème (ensemble de solution).

Ce point donne le couple solution.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°64 p 91, Déclic 1ère ES 2001).

A la dernière représentation d'un spectacle, il y avait au maximum 130 personnes, dont x adultes et y enfants et 30 adultes de plus que d'enfants.

Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants possibles, sachant qu'il s'agit de multiples de 10.

IV.2 Exercice n°2 (n°78 p 95, Transmath Term ES 1998, modifié).

Un atelier de fabrication de palettes de manutention produit deux types de palettes comportant les éléments suivants :

- pour une palette de type 1 : $0{,}05\text{m}^3$ de bois et 100 clous ;
- pour une palette de type 2 : $0{,}03\text{m}^3$ de bois et 150 clous.

L'atelier peut produire au maximum 1600 palettes par jour et dispose quotidiennement d'un stock de 69 m^3 de bois et 210 000 clous.

Dans la suite de l'exercice, on désignera par x le nombre de palettes de type 1 et par y le nombre de palettes de type 2 produites par jour.

1. Traduire par un système d'inéquations les contraintes imposées par l'énoncé.
2. Représenter graphiquement les solutions de ce système en prenant 1cm pour 100 palettes sur chaque axe du repère.
3. A la vente, l'atelier réalise un bénéfice de 4,5€ sur une palette de type 1 et de 3€ sur une palette de type 2. On note B le bénéfice obtenu chaque jour pour la vente de la totalité de la production de l'atelier.
   a) Exprimer B en fonction de x et y.
   b) Représenter sur le graphique précédent les couples (x ;y) qui permettent de réaliser un bénéfice de 6000€.
   c)

IV.3 Exercice n°3 (n°68 p 92, Déclic 1ère ES 2001).

Deux services A et B d'une clinique se partagent l'usage de deux appareils médicaux : un scanner et une radio.

Un étude a montré que les patients du service A passent en moyenne 30 minutes au scanner et 20 minutes à la radio. Quant aux patients du service B, ils passent en moyenne 15 minutes au scanner et 20 minutes à la radio.

Le service du scanner fonctionne 9 heures par jour et celui de la radio 10 heures par jour.

Ces appareils étant coûteux, on cherche à déterminer le nombre x de patients du service A et le nombre y de patients du service B pour les utiliser au mieux chaque jour.

1. a) Déterminer un système d'inéquations portant sur x et y traduisant les contraintes.
   b) A tout couple (x ;y), on associe le point M de coordonnées (x ; y) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité 0,5cm). Déterminer graphiquement l'ensemble des points M(x ;y) dont les coordonnées vérifient les contraintes.
2. Pour la gestion des deux appareils, 6€ sont prélevés sur les frais médicaux des patients du service A et 4€ pour ceux du service B.
   a) Exprimer la somme S ainsi obtenue quotidiennement en fonction de x et y. Tracer la droite correspondant à la somme S = 60.
   b) Expliquer comment, grâce au graphique, on peut trouver le couple $(x_0\,;\,y_0)$ pour lequel la somme S est maximale ; trouver ce couple et en déduire la somme maximale obtenue.